



Fundamento Matemático del Software Oficial **MAGNA-SIRGAS PRO 7**

*Conversión de Coordenadas · Ondulación Geoidal · Nivelación GNSS
Cálculos Elipsoidales · Velocidades Geodésicas · Transformación ITRF*

AUTOR

Brayan Rojas

Matemático · IGAC

COLABORADORES

Siervo León

Ing. Civil, Tecnología en Topografía · IGAC

Michael Ramírez

Ing. Catastral y Geodesta · IGAC

1. Introducción

Magna Sirgas Pro 7 es la herramienta oficial del Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC) que integra en un único entorno de cálculo los módulos necesarios para que profesionales en geodesia, topografía, catastro e ingeniería puedan operar con el Marco Geocéntrico Nacional de Referencia MAGNA-SIRGAS y sus proyecciones asociadas, garantizando resultados coherentes con los estándares nacionales e internacionales vigentes.

El programa se estructura en los módulos que se detallan a continuación:

- **Conversión de coordenadas.** Permite convertir coordenadas entre los distintos sistemas de referencia y proyección en Colombia. Abarca la conversión entre coordenadas curvilíneas (latitud y longitud) y coordenadas planas en las cuatro proyecciones oficiales —Gauss-Krüger, Cartesianas, Origen Nacional y UTM—, así como su proceso inverso; la conversión entre coordenadas curvilíneas y coordenadas geocéntricas tridimensionales (X, Y, Z). Todos los procesos operan con los dos dátum soportados por el programa: Observatorio Bogotá y MAGNA-SIRGAS (Elipsoide GRS80, equivalente a WGS84).
- **Determinación de la ondulación geoidal.** Calcula la ondulación geoidal N^* para cualquier punto del territorio colombiano mediante interpolación bilineal sobre la grilla del modelo geoidal oficial GEOCOL2004, con resolución de 2 minutos de arco. Este valor permite relacionar la altura elipsoidal obtenida por GNSS con la altura ortométrica de interés práctico.
- **Nivelación GNSS.** Determina la altura ortométrica de un punto a partir de su posición GNSS, apoyándose en la red nacional de benchmarks de nivelación del IGAC. El módulo selecciona los 40 puntos de mayor proximidad mediante la fórmula de Haversine, y obtiene la altura ajustada mediante un proceso de mínimos cuadrados con restricciones de nivelación y métodos de punto-perfil.
- **Cálculos elipsoidales - Problemas directo e inverso.** Resuelve el problema geodésico directo (dado un punto, un azimut y una distancia, determina las coordenadas de destino) y el problema inverso (dados dos coordenadas curvilíneas, determina los azimuts y la distancia geodésica entre ellos) sobre el elipsoide GRS80, mediante el algoritmo iterativo de Vincenty con precisión sub-milimétrica.

- **Cálculo de velocidades geodésicas.** Estima las componentes de velocidad geodésica (sur-norte, oeste-este y geocéntrica) para cualquier punto del territorio, mediante interpolación por distancia inversa sobre la grilla de los modelos de velocidades VEMOS de SIRGAS, con resolución de 1 grado de arco.
- **Cambio de época.** Traslada las coordenadas de un punto desde una época de rastreo hasta una época de referencia y viceversa, aplicando las velocidades de los modelos VEMOS en forma secuencial cuando el intervalo de tiempo abarca más de una versión del modelo.
- **Transformación entre realizaciones del ITRF.** Convierte coordenadas geocéntricas entre distintas realizaciones del Marco Internacional de Referencia Terrestre (ITRF1990 a ITRF2020) mediante la transformación de Helmert de 7 parámetros, utilizando los valores oficiales publicados por el IERS y adoptados por SIRGAS.

El presente documento constituye la memoria matemática oficial de Magna Sirgas Pro 7. En él se detallan con precisión las definiciones, parámetros y fórmulas que sustentan cada uno de los módulos descritos anteriormente, de modo que los resultados del programa sean reproducibles, auditables y verificables frente a los estándares del IGAC y a la literatura geodésica internacional. El documento está organizado por secciones que siguen el orden de los módulos del programa, y está dirigido a profesionales en geodesia, topografía y cartografía, así como a auditores técnicos que requieran validar la implementación.

2. Conversión y Transformación

Primeramente basándose en el elipsoide terrestre (Figura 1) se contemplan las siguientes definiciones:

- a : Semi eje mayor del elipsoide
- b : Semi eje menor del elipsoide
- H : Altura ortométrica
- h : Altura elipsoidal
- N^* : Ondulación geoidal
- f : Primer Achatamiento = $\frac{a-b}{a}$

- n : Tercer Achatamiento = $\frac{a-b}{a+b}$
- e : La primera excentricidad = $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
- e^2 : La primera excentricidad al cuadrado = $1 - \frac{b^2}{a^2}$
- e' : La segunda excentricidad = $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$
- e'^2 : La segunda excentricidad al cuadrado = $\frac{a^2}{b^2} - 1$

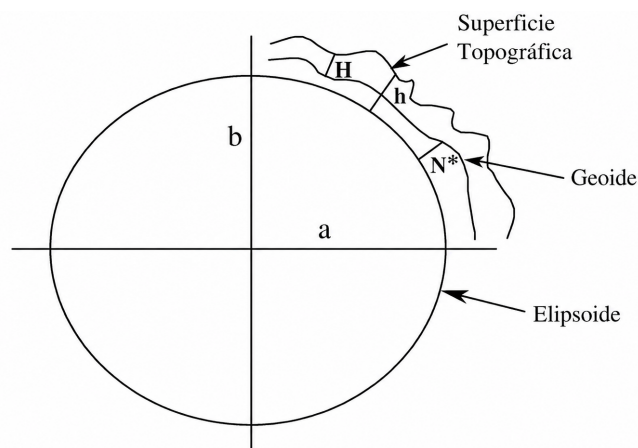


Figura 1: Elipsoide de referencia

2.1 Conversión de coordenadas curvilíneas a coordenadas planas de Gauss, Origen Nacional o U.T.M.

2.1.1 Parámetros del origen para el dátum Observatorio Bogotá

Se toma el elipsoide Internacional o de Hayford para el cual se tiene que:

- $a = 6\,378\,388\text{ m}$
- $f = \frac{1}{297}$

Los valores de las coordenadas del origen para la Proyección Gauss Krüger son:

- Latitud del origen: $\varphi_0 = 4^\circ 35' 56,57''$ al Norte del Ecuador
- Meridiano del origen:
 - Origen Oeste - Insular = $\lambda_0 = 83^\circ 04' 51,3''$ al Oeste de Greenwich

- Origen Oeste - Oeste = $\lambda_0 = 80^{\circ}04'51,3''$ al Oeste de Greenwich
- Origen Oeste = $\lambda_0 = 77^{\circ}04'51,3''$ al Oeste de Greenwich
- Origen Central = $\lambda_0 = 74^{\circ}04'51,3''$ al Oeste de Greenwich
- Origen Este = $\lambda_0 = 71^{\circ}04'51,3''$ al Oeste de Greenwich
- Origen Este - Este = $\lambda_0 = 68^{\circ}04'51,3''$ al Oeste de Greenwich

Los valores de las coordenadas planas del origen son los siguientes: para la coordenada norte, se toma el valor del norte establecido y se desplaza al ecuador; para la coordenada este, no se realiza ningún cambio al valor establecido. Por tanto, se tiene:

- Norte del origen: $N_0 = 1\,000\,000\text{ m} - 508\,552,844\,280\,132\text{ m} = 491\,447,155\,719\,868\text{ m}$
- Este del origen: $E_0 = 1\,000\,000\text{ m}$

El factor de escala de la proyección Gauss Krüger es de $K = 1$

2.1.2 Parámetros del origen para el dátum MAGNA-SIRGAS (Elipsoide GRS80, equivalente a WGS84)

Se toma el elipsoide GRS80, para el cual se tiene que:

- $a = 6\,378\,137\text{ m}$
- $f = \frac{1}{298,257\,222\,101}$

Valores de las coordenadas del origen para la Proyección Gauss Krüger

- Latitud del origen: $\varphi_0 = 4^{\circ}35'46,321\,5''$ al Norte del Ecuador
- Meridiano del origen:
 - Origen Oeste - Insular = $\lambda_0 = 83^{\circ}04'39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Oeste - Oeste = $\lambda_0 = 80^{\circ}04'39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Oeste = $\lambda_0 = 77^{\circ}04'39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Central = $\lambda_0 = 74^{\circ}04'39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich

- Origen Este = $\lambda_0 = 71^\circ 04' 39,028 5''$ al Oeste de Greenwich
- Origen Este - Este = $\lambda_0 = 68^\circ 04' 39,028 5''$ al Oeste de Greenwich

Los valores de las coordenadas planas del origen son los siguientes: para la coordenada norte, se toma el valor del norte establecido y se desplaza al ecuador; para la coordenada este, no se realiza ninguna transformación al valor establecido. Por tanto, se tiene:

- Norte del origen: $N_0 = 1\,000\,000\text{ m} - 508\,232,465\,595\text{ m} = 491\,767,534\,405\text{ m}$
- Este del origen: $E_0 = 1\,000\,000\text{ m}$

El factor de escala de la proyección Gauss Krüger es de $K = 1$

Valores de las coordenadas del origen para la Proyección Origen Nacional

- Latitud del origen: $\varphi_0 = 4^\circ 00' 00''$ al Norte del Ecuador
- Meridiano del origen: $\lambda_0 = 73^\circ 00' 00''$ al Oeste de Greenwich

Los valores de las coordenadas planas del origen son los siguientes: para la coordenada norte, se toma el valor del norte establecido y se desplaza al ecuador; para la coordenada este, no se realiza ningún cambio al valor establecido. Por tanto, se tiene:

- Norte del origen: $N_0 = 2\,000\,000\text{ m} - 441\,950,468\,481\text{ m} = 1\,558\,049,531\,519\text{ m}$
- Este del origen: $E_0 = 5\,000\,000\text{ m}$

El factor de escala de la proyección origen nacional es de $K = 0,999\,2$

Valores de las coordenadas del origen para los husos del sistema U.T.M. de Colombia

- Latitud del origen: $\varphi_0 = 0^\circ 00' 00''$ sobre el Ecuador
- Meridiano del origen: $\lambda_0 = (6 * zona) - 183$

donde zona será el valor del huso donde se ubica el punto (es decir un valor del 1 al 60).

Los valores de las coordenadas planas del origen son los siguientes: para la coordenada norte, se estableció tomar un valor si se está en el hemisferio norte y se tomará un valor distinto

si está en el hemisferio sur; para la coordenada este, no se realiza ningún cambio al valor establecido. Por tanto, se tiene:

- Norte del origen: $N_0 = 0$ m para el hemisferio norte
- Norte del origen: $N_0 = 10\,000\,000$ m para el hemisferio sur
- Este del origen: $E_0 = 500\,000$ m

El factor de escala de la proyección origen nacional es de $K = 0,999\,6$

2.1.3 Fórmulas para la conversión de un punto en coordenadas curvilíneas a coordenadas planas

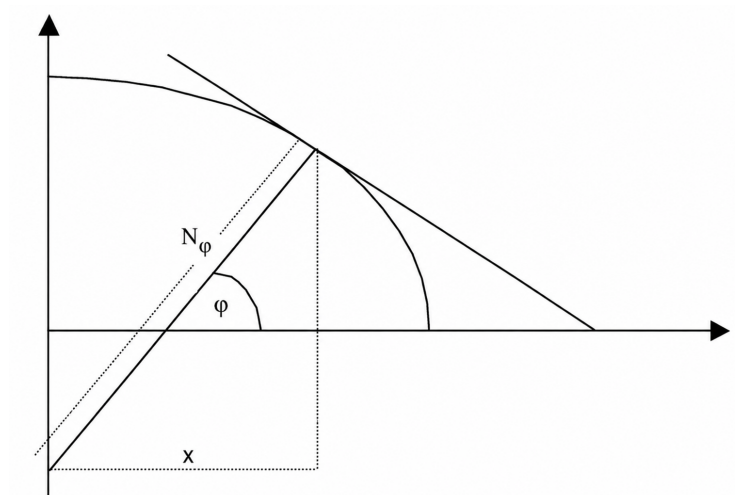


Figura 2: Gran Normal

Dado un punto p con latitud φ_p y longitud λ_p tenemos que:

- Gran Normal: $N_\varphi = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \cdot \text{Sen}^2(\varphi_p)}}$
- Variación de la Gran Normal: $\Delta N_\varphi = e'^2 \cdot \text{Cos}^2(\varphi_p)$
- Diferencia angular de longitud: $\Delta \lambda = \lambda_p - \lambda_0$
- Longitud del Arco meridiano con parámetro $n = \frac{a-b}{a+b}$: (es una mejora a la deducción de Helmert)

$$S = a[A_0 * \varphi_p - A_2 * \text{Sen}(2\varphi_p) + A_4 * \text{Sen}(4\varphi_p) - A_6 * \text{Sen}(6\varphi_p) + A_8 * \text{Sen}(8\varphi_p)]$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 1 - n + \frac{5(n^2 - n^3)}{4} + \frac{81(n^4 - n^5)}{64} \\
 A_2 &= \frac{3(n - n^2)}{2} + \frac{21(n^3 - n^4)}{16} + \frac{165n^5}{128} \\
 A_4 &= \frac{15(n^2 - n^3)}{16} + \frac{3(n^4 - n^5)}{64} \\
 A_6 &= \frac{35(n^3 - n^4)}{48} + \frac{11n^5}{768} \\
 A_8 &= \frac{-315(n^4 - n^5)}{512}
 \end{aligned}$$

- Longitud del Arco meridiano proyectada: $T_1 = S * K$

Adicionalmente, consideraremos los siguientes parámetros Auxiliares:

$$T = \tan(\varphi_p)$$

$$T_2 = N_\varphi * K * \sin(\varphi_p) * \cos(\varphi_p) \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$T_3 = N_\varphi * K * \sin(\varphi_p) * \cos^3(\varphi_p) \left[\frac{5 - T^2 + 9(\Delta N_\varphi) + 4(\Delta N_\varphi)^2}{24} \right]$$

$$\begin{aligned}
 T_4 = N_\varphi * K * \sin(\varphi_p) * \cos^5(\varphi_p) & \left[\frac{61 - 58T^2 + T^4 + 270(\Delta N_\varphi) - 330T^2(\Delta N_\varphi) + 459(\Delta N_\varphi)^2}{720} \right. \\
 & \left. + \frac{324(\Delta N_\varphi)^3 - 680T^2(\Delta N_\varphi)^2 + 88(\Delta N_\varphi)^4 - 600T^2(\Delta N_\varphi)^3 - 192T^2(\Delta N_\varphi)^4}{720} \right]
 \end{aligned}$$

$$T_5 = N_\varphi * K * \sin(\varphi_p) * \cos^7(\varphi_p) \left[\frac{1\ 385 - 3\ 111T^2 + 543T^4 - T^6}{40\ 320} \right]$$

$$T_6 = N_\varphi * K * \cos(\varphi_p)$$

$$T_7 = N_\varphi * K * \cos^3(\varphi_p) \left[\frac{1 - T^2 + \Delta N_\varphi}{6} \right]$$

$$\begin{aligned}
 T_8 = N_\varphi * K * \cos^5(\varphi_p) & \left[\frac{5 - 18T^2 + T^4 + 14(\Delta N_\varphi) - 58T^2(\Delta N_\varphi) + 13(\Delta N_\varphi)^2}{120} \right. \\
 & \left. + \frac{4(\Delta N_\varphi)^3 - 64T^2(\Delta N_\varphi)^2 - 24T^2(\Delta N_\varphi)^3}{120} \right]
 \end{aligned}$$

$$T_9 = N_\varphi * K * \cos^7(\varphi_p) \left[\frac{61 - 479T^2 + 179T^4 - T^6}{5\ 040} \right]$$

Con base a los valores generados a partir del punto p se obtiene:

$$\begin{aligned}\text{Norte} &= N_0 + T_1 + T_2(\Delta\lambda)^2 + T_3(\Delta\lambda)^4 + T_4(\Delta\lambda)^6 + T_5(\Delta\lambda)^8 \\ \text{Este} &= E_0 + T_6(\Delta\lambda) + T_7(\Delta\lambda)^3 + T_8(\Delta\lambda)^5 + T_9(\Delta\lambda)^7\end{aligned}$$

2.2 Conversión de coordenadas planas de Gauss, de Origen Nacional y U.T.M a coordenadas curvilíneas

2.2.1 Parámetros del origen para el dátum Observatorio Bogotá

Se toma el elipsoide Internacional o de Hayford para el cual se tiene que:

- $a = 6\,378\,388\text{ m}$
- $f = \frac{1}{297}$

Los valores de las coordenadas del origen para la Proyección Gauss Krüger son:

- Latitud del origen: $\varphi_0 = 4^\circ 35' 56,57''$ al Norte del Ecuador
- Meridiano del origen:
 - Origen Oeste - Insular = $\lambda_0 = 83^\circ 04' 51,3''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Oeste - Oeste = $\lambda_0 = 80^\circ 04' 51,3''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Oeste = $\lambda_0 = 77^\circ 04' 51,3''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Central = $\lambda_0 = 74^\circ 04' 51,3''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Este = $\lambda_0 = 71^\circ 04' 51,3''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Este - Este = $\lambda_0 = 68^\circ 04' 51,3''$ al Oeste de Greenwich

Los valores de las coordenadas planas del origen son los siguientes: para la coordenada norte, se toma el valor del norte establecido y se desplaza al ecuador; para la coordenada este, no se realiza ningún cambio al valor establecido. Por tanto, se tiene:

- Norte del origen: $N_0 = 1\,000\,000\text{ m} - 508\,552,844\,280\,132\text{ m} = 491\,447,155\,719\,868\text{ m}$
- Este del origen: $E_0 = 1\,000\,000\text{ m}$

El factor de escala de la proyección Gauss Krüger es de $K = 1$

2.2.2 Parámetros del origen para el dátum MAGNA-SIRGAS (Elipsoide GRS80, equivalente a WGS84)

Se toma el elipsoide GRS80, para el cual se tiene que:

- $a = 6\,378\,137\text{ m}$
- $f = \frac{1}{298,257\,222\,101}$

Valores de las coordenadas del origen para la Proyección Gauss Krüger

- Latitud del origen: $\varphi_0 = 4^\circ 35' 46,321\,5''$ al Norte del Ecuador
- Meridiano del origen:
 - Origen Oeste - Insular = $\lambda_0 = 83^\circ 04' 39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Oeste - Oeste = $\lambda_0 = 80^\circ 04' 39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Oeste = $\lambda_0 = 77^\circ 04' 39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Central = $\lambda_0 = 74^\circ 04' 39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Este = $\lambda_0 = 71^\circ 04' 39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich
 - Origen Este - Este = $\lambda_0 = 68^\circ 04' 39,028\,5''$ al Oeste de Greenwich

Los valores de las coordenadas planas del origen son los siguientes: para la coordenada norte, se toma el valor del norte establecido y se desplaza al ecuador; para la coordenada este, no se realiza ningún cambio al valor establecido. Por tanto, se tiene:

- Norte del origen: $N_0 = 1\,000\,000\text{ m} - 508\,232,465\,595\text{ m} = 491\,767,534\,405\text{ m}$
- Este del origen: $E_0 = 1\,000\,000\text{ m}$

El factor de escala de la proyección Gauss Krüger es de $K = 1$

Valores de las coordenadas del origen para la Proyección Origen Nacional

- Latitud del origen: $\varphi_0 = 4^\circ 00' 00''$ al Norte del Ecuador
- Meridiano del origen: $\lambda_0 = 73^\circ 00' 00''$ al Oeste de Greenwich

Los valores de las coordenadas planas del origen son los siguientes: para la coordenada norte, se toma el valor del norte establecido y se desplaza al ecuador; para la coordenada este, no se realiza ningún cambio al valor establecido. Por tanto, se tiene:

- Norte del origen: $N_0 = 2\,000\,000\text{ m} - 441\,950,468\,481\text{ m} = 1\,558\,049,531\,519\text{ m}$
- Este del origen: $E_0 = 5\,000\,000\text{ m}$

El factor de escala de la proyección origen nacional es de $K = 0,999\,2$

Valores de las coordenadas del origen para los husos del sistema U.T.M. de Colombia

- Latitud del origen: $\varphi_0 = 0^\circ 00' 00''$ sobre el Ecuador
- Meridiano del origen: $\lambda_0 = (6 * zona) - 183$

donde zona será el valor del huso donde se ubica el punto (es decir un valor del 1 al 60).

Los valores de las coordenadas planas del origen son los siguientes: para la coordenada norte, se estableció tomar un valor si el punto está en el hemisferio norte y se tomará un valor distinto si está en el hemisferio sur; para la coordenada este, no se realiza ningún cambio al valor establecido. Por tanto, se tiene:

- Norte del origen: $N_0 = 0\text{ m}$ para el hemisferio norte
- Norte del origen: $N_0 = 10\,000\,000\text{ m}$ para el hemisferio sur
- Este del origen: $E_0 = 500\,000\text{ m}$

El factor de escala del sistema U.T.M es de $K = 0,999\,6$

2.2.3 Fórmulas para la conversión de un punto en coordenadas planas a coordenadas curvilíneas

Dado un punto con coordenadas planas N y E , con origen conocido $(\varphi_0, \lambda_0, N_0, E_0)$ tenemos que:

- Coeficientes de S (la longitud del arco meridiano con parámetro n):

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 1 - n + \frac{5(n^2 - n^3)}{4} + \frac{81(n^4 - n^5)}{64} \\
 A_2 &= \frac{3(n - n^2)}{2} + \frac{21(n^3 - n^4)}{16} + \frac{165n^5}{128} \\
 A_4 &= \frac{15(n^2 - n^3)}{16} + \frac{3(n^4 - n^5)}{64} \\
 A_6 &= \frac{35(n^3 - n^4)}{48} + \frac{11n^5}{768} \\
 A_8 &= \frac{-315(n^4 - n^5)}{512}
 \end{aligned}$$

- Diferencia norte corregida: $\Delta N : \frac{N-N_0}{K}$
- Diferencia este corregida: $\Delta E : \frac{E-E_0}{K}$
- Aproximación inicial de la latitud: $\varphi_1 = \frac{\Delta N}{\frac{a+b}{2}k}$

Luego, para encontrar una mejor aproximación realizaremos el siguiente proceso iterativo.

Primero hallamos:

- $FP(\varphi_1) = a[A_0 * \varphi_1 - A_2 * \text{Sen}(2\varphi_1) + A_4 * \text{Sen}(4\varphi_1) - A_6 * \text{Sen}(6\varphi_1) + A_8 * \text{Sen}(8\varphi_1)] - \Delta N$
- $FH(\varphi_1) = a[A_0 * \varphi_1 - 2A_2 * \text{Cos}(2\varphi_1) + 4A_4 * \text{Cos}(4\varphi_1) - 6A_6 * \text{Cos}(6\varphi_1) + 8A_8 * \text{Cos}(8\varphi_1)]$
- $DIF = \frac{FP(\varphi_1)}{FH(\varphi_1)}$
- $\varphi_2 = \varphi_1 - DIF$

Si tenemos que $|DIF| < 9,999\ 999\ 999\ 999 * 10^{-12}$ entonces tomaremos como base de la latitud a φ_1 , de lo contrario se tomara φ_2 como el nuevo φ_1 para el cual se hallara nuevamente $FP(\varphi_1)$, $FH(\varphi_1)$ y DIF ; luego se validara que cumpla con las condiciones, esto se realizara hasta encontrar una aproximación de latitud óptima.

Una vez hallada una aproximación de latitud óptima, se determinaran las siguientes variables:

- $\eta = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 * \text{Cos}^2(\varphi_1)}}$
- Gran Normal: $N_\varphi = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 * \text{Sen}^2(\varphi_1)}}$
- Radio de curvatura en el meridiano: $\rho = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{[1 - e^2 * \text{Sen}^2(\varphi_1)]^3}}$

Con base a los valores generados a partir del punto p se obtiene que inicialmente la latitud y la longitud son:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\tan(\varphi_1)(\Delta E)^2}{2\rho * N_\varphi} + \frac{\tan(\varphi_1)(\Delta E)^4}{24\rho * N_\varphi^3}$$

$$\left[5 + 3\tan^2(\varphi_1) + \eta^2 - \frac{\tan(\varphi_1)(\Delta E)^6}{720\rho * N_\varphi^5} (61 - 90\tan^2(\varphi_1)) \right]$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\frac{\Delta E}{N_\varphi} - \frac{(\frac{\Delta E}{N_\varphi})^3}{6} * [1 + 2\tan^2(\varphi_1) + \eta^2] + \frac{(\frac{\Delta E}{N_\varphi})^5}{120} * [5 + 6\eta^2 + 28\tan^2(\varphi_1) - 3\eta^4]}{\cos(\varphi_1)}$$

Ahora, tomando φ y λ se aplica un refinamiento iterativo mediante el método de Newton-Raphson, se realiza una conversión inversa de coordenadas planas a coordenadas curvilíneas utilizando el procedimiento descrito en 2.1.3. Generando así unas coordenadas cartesianas N_2 y E_2 .

Luego definimos:

- $F(\varphi, \lambda)$ el vector de residuos como:

$$F(\varphi, \lambda) = \begin{bmatrix} N_2 - N \\ E_2 - E \end{bmatrix}$$

- $J(\varphi, \lambda)$ el Jacobiano de la conversión como:

$$J(\varphi, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varphi} & \frac{\partial N}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi} & \frac{\partial E}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$$

- Δ el vector de corrección como:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}$$

Y resolviendo el siguiente sistema lineal:

$$J(\varphi, \lambda) \cdot \Delta = F(\varphi, \lambda)$$

Obtenemos un $\Delta\varphi$ y $\Delta\lambda$, con los cuales refinamos φ y λ de modo que:

$$\varphi_2 = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$$

si $\max(|N_2 - N|, |E_2 - E|) < 0,00000001$ m entonces φ_2 y λ_2 son un refinamiento optimo y estos son la latitud y la longitud que se buscaba.

De lo contrario; realizamos nuevamente el método de Newton-Raphson sobre φ_2 y λ_2 ; hasta un máximo de 6 iteraciones.

2.3 Conversión de coordenadas curvilíneas a coordenadas planas cartesianas

2.3.1 Parámetros del origen para el dátum Observatorio Bogotá

Se toma el elipsoide Internacional o de Hayford para el cual se tiene que:

- $a = 6\,378\,388$ m
- $f = \frac{1}{297}$

Ejemplo del origen para Bogotá es:

- $\varphi_0 = 4^\circ 41' 00''$ al Norte del Ecuador
- $\lambda_0 = 74^\circ 09' 00''$ al Oeste de Greenwich
- $N_0 = 109\,320,965$ m
- $E_0 = 92\,334,879$ m
- Plano de proyección: $PP = 2\,550$ m

2.3.2 Parámetros del origen para el dátum MAGNA-SIRGAS (Elipsoide GRS80, equivalente a WGS84)

Se toma el elipsoide GRS80 para el cual se tiene que:

- $a = 6\,378\,137$ m
- $f = \frac{1}{298,257\,222\,101}$

Ejemplo del origen para Bogotá es:

- $\varphi_0 = 4^\circ 40' 49,75''$ al Norte del Ecuador
- $\lambda_0 = 74^\circ 08' 47,73''$ al Oeste de Greenwich
- $N_0 = 109\,320,965$ m
- $E_0 = 92\,334,879$ m
- Plano de proyección: $PP = 2\,550$ m

2.3.3 Fórmulas para la conversión de un punto en coordenadas curvilíneas a coordenadas planas cartesianas

Dado un punto p con coordenadas, latitud φ y longitud λ tenemos que:

- Latitud media: $\varphi_m = \frac{\varphi + \varphi_0}{2}$
- Diferencial de Latitud : $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$
- Diferencial de Longitud : $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$
- Gran Normal asociado a la latitud φ del punto: $N_\varphi = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \cdot \text{Sen}^2(\varphi)}}$
- Gran Normal asociado a la latitud del origen: $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \cdot \text{Sen}^2(\varphi_0)}}$
- Radio de curvatura en el meridiano asociado a la latitud origen: $\rho = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{[1-e^2 \cdot \text{Sen}^2(\varphi_0)]^3}}$
- Media del radio de curvatura en el meridiano : $\rho_m = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{[1-e^2 \cdot \text{Sen}^2(\varphi_m)]^3}}$

Con base a las fórmulas anteriores, se calculan las coordenadas cartesianas con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Norte} &= N_0 + \rho \left[\frac{\Delta\varphi + \text{Tan}(\varphi_0)(\Delta\lambda * N_\varphi * \text{Cos}(\varphi))^2}{2\rho N} \right] \left(1 + \frac{PP}{\rho_m} \right) \\ \text{Este} &= E_0 + \Delta\lambda * N_\varphi * \text{Cos}(\varphi) \left(1 + \frac{PP}{N} \right) \end{aligned}$$

2.4 Conversión de coordenadas planas Cartesianas a coordenadas curvilíneas

2.4.1 Parámetros del origen para el dátum Observatorio Bogotá

Se toma el elipsoide Internacional o de Hayford para el cual se tiene que:

- $a = 6\,378\,388\text{ m}$
- $f = \frac{1}{297}$

Ejemplo del origen para Bogotá es:

- $\varphi_0 = 4^\circ41'00''$ al Norte del Ecuador
- $\lambda_0 = 74^\circ09'00''$ al Oeste de Greenwich
- $N_0 = 109\,320,965\text{ m}$
- $E_0 = 92\,334,879\text{ m}$
- Plano de proyección: $PP = 2\,550\text{ m}$

2.4.2 Parámetros del origen para el dátum MAGNA-SIRGAS (Elipsoide GRS80, equivalente a WGS84)

Se toma el elipsoide GRS80 para el cual se tiene que:

- $a = 6\,378\,137\text{ m}$
- $f = \frac{1}{298,257\,222\,101}$

Ejemplo del origen para Bogotá es:

- $\varphi_0 = 4^\circ40'49,75''$ al Norte del Ecuador
- $\lambda_0 = 74^\circ08'47,73''$ al Oeste de Greenwich
- $N_0 = 109\,320,965\text{ m}$
- $E_0 = 92\,334,879\text{ m}$
- Plano de proyección: $PP = 2\,550\text{ m}$

2.4.3 Fórmulas para la conversión de un punto en coordenadas planas cartesianas a coordenadas curvilíneas

Dado un punto p con coordenadas cartesianas *Norte* y *Este* tenemos que:

- Diferencial Norte : $\Delta N = Norte - N_0$
- Diferencial Este : $\Delta E = Este - E_0$
- Gran Normal asociado a la latitud origen: $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2*\text{Sen}^2(\varphi_0)}}$
- Radio de curvatura en el meridiano asociado a la latitud origen: $\rho = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{[1-e^2*\text{Sen}^2(\varphi_0)]^3}}$
- Incremento latitudinal: $\Delta\varphi = \frac{\Delta N}{1+\frac{PP}{a(1-e^2)}\rho} - \left(\frac{\text{Tan}(\varphi_0)}{2\rho*N}\right) \left(\frac{\Delta E}{1+\frac{PP}{a}}\right)^2$

Con base a las fórmulas anteriores, se tiene que la latitud es:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

Una vez hallada la latitud definimos:

- Gran Normal asociado a la latitud φ : $N_\varphi = \frac{a}{\sqrt{1-e^2*\text{Sen}^2(\varphi)}}$
- Incremento longitudinal: $\Delta\lambda = \frac{\Delta E}{N_\varphi*\text{Cos}(\varphi)\left(1+\frac{PP}{a}\right)}$

Con lo cual se tiene que la longitud es:

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

2.5 Conversión de coordenadas curvilíneas a Geocéntricas

Dado un punto con coordenadas curvilíneas (φ, λ, h) , se tomarán las siguientes consideraciones:

- 1) Se tomará de referencia alguno de los dos dátum vistos en las anteriores conversiones (dátum Observatorio Bogotá o dátum MAGNA-SIRGAS).
- 2) N_φ será la Gran Normal asociado a la latitud.

Con base a lo anterior, las coordenadas geocéntricas están dadas por las siguientes fórmulas:

$$X = (N_{\varphi} + h) \cos(\varphi) * \cos(\lambda)$$

$$Y = (N_{\varphi} + h) \cos(\varphi) * \sin(\lambda)$$

$$Z = [N_{\varphi}(1 - e^2) + h] \sin(\varphi)$$

2.6 Conversión de coordenadas Geocéntricas a curvilíneas

Dado un punto con coordenadas geocéntricas (X, Y, Z) , se tomarán las siguientes consideraciones:

- 1) Se tomará de referencia alguno de los dos dátum vistos en las anteriores conversiones (dátum Observatorio Bogotá o dátum MAGNA-SIRGAS).
- 2) N_{φ} será la Gran Normal asociado a la latitud
- 3) $P = \sqrt{X^2 + Y^2}$
- 4) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a*Z}{b*P}\right)$

Con base a lo anterior, la latitud y su Gran Normal asociado serán:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{Z + e'^2 * b * \sin^3(\theta)}{P - e^2 * a * \cos^3(\theta)} \right)$$

$$N_{\varphi} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 * \sin^2(\varphi)}}$$

Con lo cual la longitud y la altura elipsoidal serán:

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right)$$

$$h = \frac{P}{\cos(\varphi)} - N_{\varphi}$$

3. Ondulación Geoidal

Inicialmente se considerara la grilla del modelo geoidal GEOCOL2004 o la grilla del modelo cuasi geoidal QGeoidCol2023, en la que cada uno de sus nodos contiene información sobre la ondulación geoidal y anomalía de altura respectivamente, en esa coordenada. Para GEOCOL2004 cada nodo tiene una separación de $2'$ tanto de ancho como de alto y para QGeoidCol2023 esa separación es de $5'$.

Ahora considere un punto P en la grilla del modelo geoidal GEOCOL2004 (Figura 3) o del modelo cuasi geoidal QGeoidCol2023 (Figura 4), rodeado por 4 nodos.

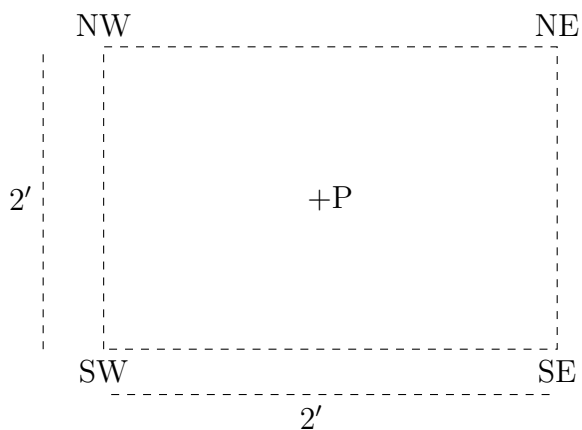


Figura 3: Punto en la Grilla del modelo geoidal GEOCOL2004 o del modelo cuasi geoidal QGeoidCol2023

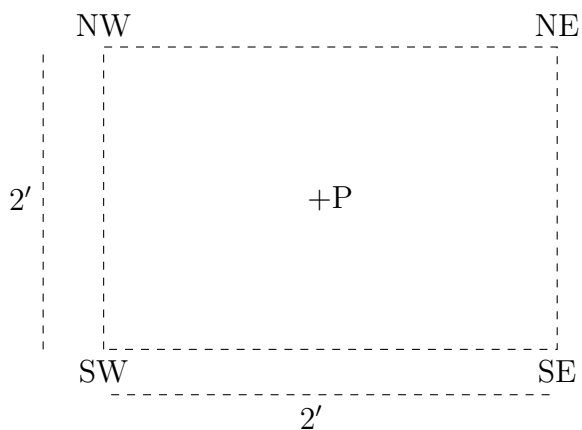


Figura 4: Punto en la Grilla del modelo geoidal GEOCOL2004 o del modelo cuasi geoidal QGeoidCol2023

De manera que:

- De NW se conoce la latitud (φ_{NW}), la longitud (λ_{NW}) y la ondulación N_{NW}^*
- De NE se conoce la latitud (φ_{NE}), la longitud (λ_{NE}) y la ondulación N_{NE}^*
- De SW se conoce la latitud (φ_{SW}), la longitud (λ_{SW}) y la ondulación N_{SW}^*
- De SE se conoce la latitud (φ_{SE}), la longitud (λ_{SE}) y la ondulación N_{SE}^*
- Del punto P se conoce la latitud (φ_p) y la longitud (λ_p)
- El diferencial de latitud es $t = \frac{\varphi_{NW} - \varphi_p}{2'}$
- El diferencial de longitud es $v = \frac{\lambda_p - \lambda_{SW}}{2'}$

Teniendo en cuenta lo anterior y aplicando interpolación bilineal se tiene que la ondulación geoidal del punto P está dada por la siguiente fórmula:

$$N_p^* = (1 - t)(1 - v)N_{NW}^* + t(1 - v)N_{SW}^* + t * v * N_{SE}^* + (1 - t)v * N_{NE}^*$$

4. Nivelación GNSS

Dado un punto o perfil $P = (\varphi_p, \lambda_p)$ con altura elipsoidal h_p , se desea saber su altura ortométrica H_p , para lo cual se realiza el procedimiento descrito a continuación.

Haciendo uso la red de benchmarks de nivelación georreferenciados de Colombia, que contiene puntos donde se conocen H , h y N . Se determinan los 40 puntos de la red con mayor proximidad al punto dado, utilizando la fórmula de Haversine:

$$d = 2R * \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a'}{1 - a'}} \right)$$

donde:

- d es la distancia entre el punto P y algún punto i de la red.
- $R = 6\,378\,137$ m que corresponde al semi eje mayor de la tierra.
- $a' = \text{Sen}^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \text{Cos}(\varphi_p) * \text{Cos}(\varphi_i) * \text{Sen}^2\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)$
- $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_i$
- $\Delta\lambda = \lambda_p - \lambda_i$

Una vez obtenidos los 40 puntos más cercanos al punto dado, se ordenan de menor a mayor distancia, obteniendo el vector: $A = [P_1, P_2, \dots, P_{40}]$.

Luego se halla la ondulación geoidal del punto P , es decir N_p , basándonos en el desarrollo expuesto en 3. **Ondulación Geoidal**

Con lo cual ya es posible comparar el punto dado P con los puntos base P_i , obteniendo las siguientes diferencias:

- Diferencias de alturas elipsoidales: $\Delta h_i = h_p - h_i$
- Diferencias de ondulaciones: $\Delta N_i = N_p - N_i$
- Diferencias de alturas ortométricas: $\Delta H_i = H_p - H_i$

De manera que definimos:

- El vector de las diferencias de alturas ortométricas: $L = [\Delta H_1, \Delta H_2, \dots, \Delta H_{40}]$.
- El vector de condiciones de restricción: $C = [C_1, C_2, \dots, C_{40}]$

Donde $C_i = H_i - H_{i+1}$ son diferencias de nivel conocidas con alta precisión.

- La matriz de transición: $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de dimensión $(n - 1) \times n$
- La matriz identidad I de dimensión $n \times n$, que actuara como matriz de pesos.

Note que la fila i -ésima de $B \cdot L$ produce exactamente $L_i - L_{i+1}$ y si las observaciones GNSS fueran perfectas esto sería igual a $C_i = H_i - H_{i+1}$, por tanto existe un vector de discrepancias $W = C - B \cdot L$ que mide cuánto difieren las observaciones GNSS ($B \cdot L$) de los valores conocidos de nivelación (C).

Luego, haciendo corrección por mínimos cuadrados definimos el vector de correcciones como:

$$V = I^{-1} \cdot B^T \cdot (B \cdot P^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot W$$

$$V = B^T \cdot (B \cdot B^T)^{-1} \cdot W$$

Por tanto, el vector de las diferencias de alturas ortométricas ajustadas es $L^* = L + V$ satisfaciendo que $B \cdot L^* = C$.

Ahora, para cada punto base P_i se calcula una estimación de la altura ortométrica del punto P , obteniendo $\overline{H}_i = H_i + L^*$.

Finalmente, la altura ortométrica H_p será el promedio de las $\overline{H}_i$, de manera que:

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{40} \overline{H}_i$$

Nota: Para una comprensión mas detallada de los procedimientos previamente descritos por favor diríjase al siguiente documento de L. Siervo (9.3)[10].

5. Cálculos Elipsoidales

Tanto para el calculo del problema directo y el problema inverso se tomara los parámetros del elipsoide GRS80; aplicando el algoritmo de Vincenty.

5.1 Problema Directo

Dado el punto $P_1 = (\varphi_1, \lambda_1)$, el azimut geodésico $\alpha_{1,2}$ y la distancia geodésica $s_{1,2}$, se busca hallar $P_2 = (\varphi_2, \lambda_2)$ y el azimut $\alpha_{2,1}$.

Para ello primero se define:

- La latitud reducida del punto P_1 a latitud φ_1 : $U_1 = \tan^{-1}[(1 - f)\tan(\varphi_1)]$
- El azimut del ecuador: $\alpha = \sin^{-1}[\cos(U_1) * \sin(\alpha_{1,2})]$
- La distancia esférica angular desde el ecuador hasta P_1 : $\sigma_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\tan(U_1)}{\alpha_{1,2}}\right)$
- La segunda excentricidad al cuadrado proyectada: $u^* = e'^2 * \cos^2(\alpha)$
- 1° estimación de corrección elipsoidal: $A = 1 + \frac{u^*}{16\,384}[4\,096 + u^*(-768 + u^*(320 - 175u^*))]$
- 2° estimación de corrección elipsoidal: $B = \frac{u^*}{1\,024}[256 + u^*(-128 + u^*(320 - 175u^*))]$

Luego, para hallar la separación angular (σ), se iterara las siguientes ecuaciones tomando como valor inicial $\sigma = \frac{s_{1,2}}{b * A}$, hasta lograr que $\Delta\sigma < 0,006$ mm:

$$2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma$$

$$\Delta\sigma = B * Sen(\sigma) \left\{ Cos(2\sigma_m) + \frac{B}{4} [Cos(\sigma)(-1 + 2Cos^2(2\sigma_m)) - \frac{B}{6} Cos(2\sigma_m) \right. \\ \left. (-3 + 4Sen^2(\sigma))(-3 + 4Cos^2(2\sigma_m))] \right\}$$

$$\sigma = \frac{s_{1,2}}{b * A} + \Delta\sigma$$

Una vez obtenido el σ resultante de la iteración, definimos:

- La diferencia de longitud sobre la esfera auxiliar:

$$\lambda^* = Tan^{-1} \left[\frac{Sen(\sigma) * Sen(\alpha_{1,2})}{Cos(U_1) * Cos(\sigma) - Sen(U_1) * Sen(\sigma) * Cos(\alpha_{1,2})} \right]$$

- El coeficiente auxiliar de corrección elipsoidal: $C = \frac{f}{16} Cos^2(\alpha) [4 + f(4 - 3Cos^2(\alpha))]$
- La diferencia de longitud sobre el elipsoide:

$$L = \lambda^* - f(1 - C)Sen(\alpha) \left\{ \sigma + Sen(\sigma)C [Cos(2\sigma_m) + Cos(\sigma)C(-1 + 2Cos^2(2\sigma_m))] \right\}$$

Con base a lo anterior el punto $P_2 = (\varphi_2, \lambda_2)$ y el azimut $\alpha_{2,1}$ son:

$$\varphi_2 = Tan^{-1} \left[\frac{Sen(U_1) * Cos(\sigma) + Cos(U_1) * Sen(\sigma) * Cos(\alpha_{1,2})}{(1 - f)\sqrt{Sen^2(\alpha) + [Sen(U_1) * Sen(\sigma) - Cos(U_1) * Cos(\sigma) * Cos(\alpha_{1,2})]^2}} \right]$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + L$$

$$\alpha_{2,1} = Tan^{-1} \left(\frac{Sen(\alpha)}{-Sen(U_1) * Sen(\sigma) + Cos(U_1) * Cos(\sigma) * Cos(\alpha_{1,2})} \right)$$

5.2 Problema Inverso

Dado el punto $P_1 = (\varphi_1, \lambda_1)$ y $P_2 = (\varphi_2, \lambda_2)$ se busca hallar los azimut geodésicos $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,1}$ y la distancia geodésica $s_{1,2}$.

Para ello se define:

- La latitud reducida del punto P_1 a latitud φ_1 : $U_1 = \tan^{-1}[(1-f)\tan(\varphi_1)]$
- La latitud reducida del punto P_2 a latitud φ_2 : $U_2 = \tan^{-1}[(1-f)\tan(\varphi_2)]$
- La diferencia de longitud sobre el elipsoide: $L = \lambda_2 - \lambda_1$
- La segunda excentricidad al cuadrado proyectada: $u^* = e'^2 * \cos^2(\alpha)$
- 1° estimación de corrección inversa: $A = 1 + \frac{u^*}{256}(64 + u^*(-12 + 5u^*))$
- 2° estimación de corrección inversa: $B = \frac{u^*}{512}(123 + u^*(-64 + 37u^*))$
- La diferencia de separación angular:

$$\Delta\sigma = B * \sin(\sigma) \{ \cos(2\sigma_m) + \frac{B}{4} [\cos(\sigma)(-1 + 2\cos^2(2\sigma_m)) - \frac{B}{6} \cos(2\sigma_m) (-3 + 4\sin^2(\sigma))(-3 + 4\cos^2(2\sigma_m))] \}$$

- El coeficiente auxiliar de corrección elipsoidal: $C = \frac{f}{16} \cos^2(\alpha) [4 + f(4 - 3\cos^2(\alpha))]$

Luego, para hallar la diferencia de longitud sobre la esfera auxiliar (λ^*), se itera las siguientes ecuaciones tomando como valor inicial $\lambda_0^* = L$ hasta que $\lambda_{i+1}^* - \lambda_i^* < 0,006$ mm o se cumplan 100 iteraciones:

$$\begin{aligned} \sin(\sigma) &= \sqrt{[\cos(U_2) * \sin(\lambda^*)]^2 + [\cos(U_1) * \sin(U_2) - \sin(U_1) * \cos(U_2) * \cos(\lambda^*)]^2} \\ \cos(\sigma) &= \sin(U_1) * \sin(U_2) + \cos(U_1) * \cos(U_2) * \cos(\lambda^*) \\ \sin(\alpha) &= \frac{\cos(U_1) * \cos(U_2) * \sin(\lambda^*)}{\sin(\sigma)} \\ \cos(2\sigma_m) &= \cos(\sigma) - \frac{2\sin(U_1) * \sin(U_2)}{\cos^2(\alpha)} \\ \lambda^* &= L + f(1 - C)\sin(\alpha) \left\{ \sigma + \sin(\sigma) * C \left[\cos(2\sigma_m) + \cos(\sigma) * C (-1 + 2\cos^2(2\sigma_m)) \right] \right\} \end{aligned}$$

Una vez obtenido el λ^* resultante de la iteración, se tiene que los azimut geodésicos $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,1}$ y la distancia geodésica $s_{1,2}$ son:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \tan^{-1} \left(\frac{\cos(U_2) * \sin(\lambda^*)}{\cos(U_1) * \sin(U_2) - \sin(U_1) * \cos(U_2) * \cos(\lambda^*)} \right) \\ \alpha_{2,1} &= \tan^{-1} \left(\frac{\cos(U_1) * \sin(\lambda^*)}{-\sin(U_1) * \cos(U_2) + \cos(U_1) * \sin(U_2) * \cos(\lambda^*)} \right) \\ s_{1,2} &= b * A(\sigma - \Delta\sigma) \end{aligned}$$

6. Cálculo Velocidades

Inicialmente se consideran las grillas de los modelos de velocidades VEMOS, en la que cada uno de sus nodos contiene información sobre el componente velocidad en esa coordenada. Cada nodo tiene una separación de 1° tanto de ancho como de alto.

Ahora considere un punto P en la grilla, rodeado por 4 nodos (Figura 5).

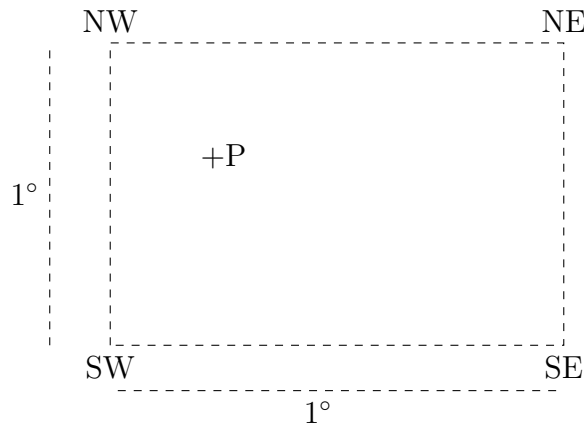


Figura 5: Punto en la grilla del modelo de velocidades

De manera que:

- De NW se conoce la latitud (φ_{NW}), la longitud (λ_{NW}), la velocidad sur-norte (VSN_{NW}) y la velocidad oeste-este (VWE_{NW})
- De NE se conoce la latitud (φ_{NE}), la longitud (λ_{NE}), la velocidad sur-norte (VSN_{NE}) y la velocidad oeste-este (VWE_{NE})
- De SW se conoce la latitud (φ_{SW}), la longitud (λ_{SW}), la velocidad sur-norte (VSN_{SW}) y la velocidad oeste-este (VWE_{SW})
- De SE se conoce la latitud (φ_{SE}), la longitud (λ_{SE}), la velocidad sur-norte (VSN_{SE}) y la velocidad oeste-este (VWE_{SE})
- Del punto P se conoce la latitud (φ_p) y la longitud (λ_p)

Con estos valores conocidos se determina la distancia geodésica entre el punto P y cada una de las esquinas de la celda (Figura 6).

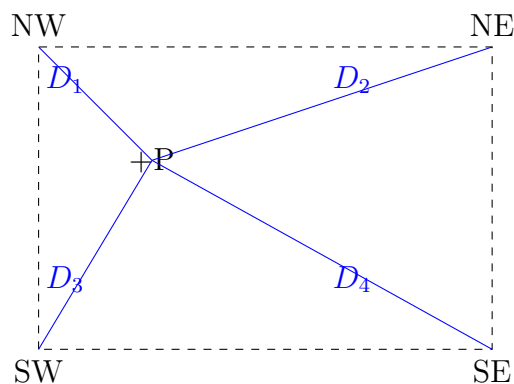


Figura 6: Distancias geodésicas de los nodos al punto

Así que:

- Distancia del punto P a la esquina NW : D_1
- Distancia del punto P a la esquina NE : D_2
- Distancia del punto P a la esquina SW : D_3
- Distancia del punto P a la esquina SE : D_4

Con estos valores se determina la velocidad sur-norte para el punto P (lo llamaremos VSN_p) y la velocidad oeste-este del punto P (lo llamaremos VWE_p) como:

$$VSN_p = \frac{\frac{VSN_{NW}}{D_1} + \frac{VSN_{NE}}{D_2} + \frac{VSN_{SW}}{D_3} + \frac{VSN_{SE}}{D_4}}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4}}$$

$$VWE_p = \frac{\frac{VWE_{NW}}{D_1} + \frac{VWE_{NE}}{D_2} + \frac{VWE_{SW}}{D_3} + \frac{VWE_{SE}}{D_4}}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4}}$$

Nota: En el caso en que el Modelo de Velocidades no contenga datos para los cuatro nodos asociados a la posición geográfica del punto, se realizará el cálculo de VSN_p y VWE_p con los datos de las esquinas existentes (mínimo una esquina). Los términos de la esquina donde no existan datos no se incluirán en las fórmulas asociadas a ese nodo.

Luego, se define un nuevo punto $P_2 = (\varphi_2, \lambda_2) = (\varphi_p, \lambda_p + 1'')$ y d como la distancia geodésica entre P y P_2 ; los cuales determinan las siguientes ecuaciones:

$$sn = \frac{VSN_p}{3\,600d}$$

$$we = \frac{VWE_p}{3\,600d * \cos(\varphi_p)}$$

De manera que se define un nuevo punto $P_3 = (\varphi_3, \lambda_3) = (\varphi_p + sn, \lambda_p + we)$ y asumiendo una altura elipsoidal $h = 0$, obtenemos las coordenadas geocéntricas de $P = (X_p, Y_p, Z_p)$ y de $P_3 = (X_3, Y_3, Z_3)$ basándonos en el desarrollo expuesto en 2. **Conversión y transformación**.

Así que, finalmente la velocidad en el punto p , será $V_p = (V_x, V_y, V_z)$ donde:

$$V_x = X_3 - X_p$$

$$V_y = Y_3 - Y_p$$

$$V_z = Z_3 - Z_p$$

7. Cambio de Época

Dado un punto $P = (\varphi_p, \lambda_p)$ en una época de rastreo t_0 para su traslado a una época de referencia t_1 .

Se realiza la conversión de coordenadas geográficas a geocéntricas del punto P (el procedimiento detallado de este cálculo se encuentra en 2. **Conversión y Transformación**).

De manera que se obtiene $P = (X_p, Y_p, Z_p)$

Se calculan las velocidades para el punto P considerando la grilla del modelo de velocidades VEMOS que correspondan desde t_0 hasta t_1 (el procedimiento detallado de este cálculo se encuentra en 6. **Cálculo de velocidades**).

De manera que se obtiene $V_p = (V_x, V_y, V_z)$.

Con base en lo anterior se define:

$$P' = \begin{bmatrix} X_{p'} \\ Y_{p'} \\ Z_{p'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \Delta t$$

Donde P' son las coordenadas geocéntricas luego del cambio de época y $\Delta t = t_1 - t_0$

Finalmente, se realiza nuevamente la conversión de coordenadas, esta vez de geocéntricas a geográficas ($P' \rightarrow P''$).

De este modo, se obtiene:

$$P'' = (\varphi_{p''}, \lambda_{p''})$$

correspondiente a las coordenadas geográficas del punto luego del cambio de época.

Nota: Cuando el intervalo de fechas abarca más de un modelo VEMOS, el proceso se realiza de forma secuencial.

Partiendo del modelo VEMOS más antiguo correspondiente de acuerdo al periodo de vigencia, considerando un Δt apropiado, y se realiza la transformación hacia el siguiente modelo. Posteriormente, se emplean las coordenadas obtenidas para repetir el procedimiento de manera iterativa hasta alcanzar la fecha deseada.

Las diferentes versiones del modelo de velocidades vemos y sus vigencias se encuentran en la siguiente tabla 1:

Modelo	Período de vigencia
VEMOS2022	de 2017-02-01 a 2022-04-30
VEMOS2017	de 2014-01-01 a 2017-01-28
VEMOS2015	de 2010-03-14 a 2015-04-11
VEMOS2009	de 2000-01-02 a 2009-06-30
VEMOS2003	de 1995-05-01 a 2001-04-14

Tabla 1: Modelos de velocidades VEMOS y sus períodos de vigencia

8. Transformación de ITRF

Para lograr convertir coordenadas de un sistema de referencia geodésico a otro; se utilizara la transformación de Helmert de 7 parámetros (Figura 7).

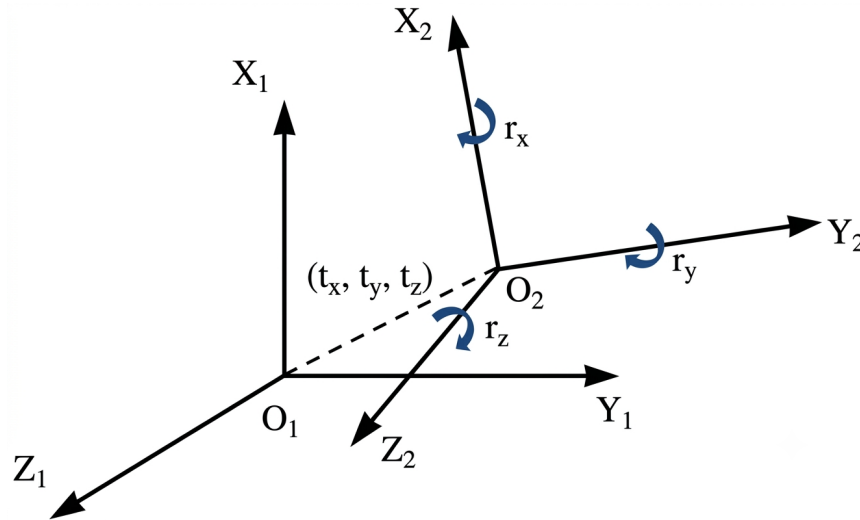


Figura 7: Transformación de Helmert

la fórmula es:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + \left(D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & R_z & -R_y \\ -R_z & 0 & R_x \\ R_y & -R_x & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Donde:

- X_2, Y_2, Z_2 son las coordenadas transformadas.
- X_1, Y_1, Z_1 son las coordenadas originales.
- T_x, T_y, T_z son las traslaciones respecto a cada eje.
- R es matriz de rotación para ángulos pequeños en 3 dimensiones, con R_x, R_y, R_z las pequeñas rotaciones respecto a cada eje.
- D es el factor de escala.
- I es la matriz identidad 3x3.

Nota: Para las transformaciones consideradas entre realizaciones ITRF, se asume $R_x = 0$ y $R_y = 0$, dado que los parámetros oficiales empleados reportan estas rotaciones como nulas o despreciables. Esto salvo para el ITRF1993, para el cual se considerará $R_x = 2,81$; $R_y = 3,38$; y $R_z = -0,40$.

Por último, de las coordenadas originales dadas, se seguirán los parámetros de la siguiente tabla 2:

Función	T_x (mm)	T_y (mm)	T_z (mm)	D (ppb)	$R_z (\times 10^{-9} \text{ rad})$	Época
ITRF1990→2014	-25,4	-11,5	+92,8	-4,79	-0,26	2010
ITRF1991→2014	-27,4	-15,5	+76,8	-4,49	-0,26	2010
ITRF1992→2014	-15,4	-1,5	+70,8	-3,09	-0,26	2010
ITRF1993→2014	+50,4	-3,3	+60,2	-4,29	-0,4	2010
ITRF1994→2014	-7,4	+0,5	+62,8	-3,8	-0,26	2010
ITRF1996→2014	-7,4	+0,5	+62,8	-3,8	-0,26	2010
ITRF1997→2014	-7,4	+0,5	+62,8	-3,8	-0,26	2010
ITRF2000→2014	-0,7	-1,2	+26,1	-2,12	0	2010
ITRF2005→2014	-2,6	-1,0	+2,3	-0,92	0	2010
ITRF2008→2014	-1,6	-1,9	-2,4	+0,02	0	2010
ITRF2014→2020	+1,4	+0,9	-1,4	+0,42	0	2015
ITRF2020→2014	-1,4	-0,9	+1,4	-0,42	0	2015

Tabla 2: Tabla de parámetros de transformación entre soluciones ITRF

9. Referencias

9.1 Sistemas de referencia geodésicos y conversión de coordenadas

- [1] Moritz, H. (2000). Geodetic Reference System 1980. Journal of Geodesy, 74(1), 128–133.
- [2] Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC). (2005). Adopción del Marco Geocéntrico Nacional de Referencia MAGNA-SIRGAS como dátum oficial de Colombia. IGAC, Bogotá.
- [3] Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC). (2018). Resolución IGAC 715 del 8 de junio de 2018: Actualización del Marco Geocéntrico Nacional de Referencia MAGNA-SIRGAS. IGAC, Bogotá.

- [4] Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC). (2021). Resolución IGAC 370 de 2021: Proyección cartográfica Transversa de Mercator como sistema oficial de coordenadas planas para Colombia — Origen Nacional. IGAC, Bogotá.
- [5] Torge, W., & Müller, J. (2012). Geodesy (4.^a ed.). De Gruyter, Berlín.
- [6] Bowring, B. R. (1976). Transformation from spatial to geographical coordinates. Survey Review, 23(181), 323–327.

9.2 Ondulación geoidal e interpolación bilineal

- [7] Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC). (2004). Determinación de la superficie vertical de referencia para Colombia: Modelo Geoidal GEOCOL2004. Subdirección de Geografía y Cartografía, IGAC, Bogotá.
- [8] Moritz, H. (1980). Advanced Physical Geodesy. Wichmann, Karlsruhe.

9.3 Nivelación GNSS y ajuste por mínimos cuadrados

- [9] Sánchez, L., & Martínez, W. (1999). Nivelación satelital en Colombia: Metodología y resultados. Instituto Geográfico Agustín Codazzi, Bogotá.
- [10] L.Siervo (2025). Correcciones al artículo "Nivelación satelital en Colombia: Metodología y resultados". Instituto Geográfico Agustín Codazzi, Bogotá.
- [11] Sinnott, R. W. (1984). Virtues of the Haversine. Sky and Telescope, 68(2), 158–159.
- [12] Koch, K. R. (1999). Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models (2.^a ed.). Springer, Berlín.
- [13] Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC). Red Geodésica Nacional — Red de nivelación y benchmarks. Portal oficial.

9.4 Problemas directo e inverso sobre el elipsoide - Algoritmo de Vincenty

- [14] Vincenty, T. (1975). Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations. Survey Review, 23(176), 88–93.

- [15] Thomas, C. M., & Featherstone, W. E. (2005). Validation of Vincenty's formulas for the geodesic using a new fourth-order extension of Kivioja's formula. *Journal of Surveying Engineering*, 131(1), 20–26.

9.5 Modelo de velocidades VEMOS

- [16] Drewes, H., & Sánchez, L. (2020). Velocity model for SIRGAS 2017: VEMOS2017. PANGAEA – Data Publisher for Earth & Environmental Science, DGFI-TUM.
- [17] Sánchez, L., & Drewes, H. (2016). VEMOS2015: Velocity and deformation model for Latin America and the Caribbean. PANGAEA – Data Publisher for Earth & Environmental Science.
- [18] Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas (SIRGAS). Modelo de velocidades VEMOS.

9.6 Cambio de época de coordenadas

- [19] Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas (SIRGAS). Realizaciones SIRGAS.
- [20] Drewes, H. (2009). Uso de las coordenadas SIRGAS en los marcos nacionales de referencia. *Boletín SIRGAS*, 15.

9.7 Transformación entre realizaciones ITRF — Helmert 7 parámetros

- [21] Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L., & Collilieux, X. (2016). ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121(8), 6109–6131.
- [22] Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L., & Collilieux, X. (2017). Analysis and results of ITRF2014 (IERS Technical Note 38). Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- [23] International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS). (2010). IERS Conventions 2010 (IERS Technical Note 36). Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.

- [24] Parámetros de transformación entre soluciones ITRF

9.8 Otros referencias generales

- [25] Ecuaciones Originales en FORTRAN