

GUÍA METODOLÓGICA PARA LA OBTENCIÓN DE ALTURAS UTILIZANDO EL SISTEMA GNSS

**Instituto Geográfico Agustín Codazzi
Dirección de Gestión de Información Geográfica
Subdirección Cartográfica y Geodésica**

**Carrera 30 N°. 48 – 51
Bogotá, D. C. – Colombia**

Corrección y actualización al documento publicado por la Dra. Laura Sánchez en el año 2004.

Elaboró: Siervo William León Callejas

Introducción

El sistema satelital de posicionamiento global GNSS puede ser empleado en la extensión del control vertical sobre aquellas zonas en donde no se cuenta con puntos de nivelación y la precisión requerida está dentro del orden trigonométrico.

Las posibilidades de operatividad a cualquier hora, condiciones climáticas y del relieve permiten que el sistema GNSS, unido a un modelo geoidal de alta resolución, sea una herramienta poderosa y económica en la determinación de la altitud de nuevos puntos de referencia para propósitos geodésicos, cartográficos y topográficos.

La presente guía tiene por objeto proporcionar orientación acerca del trabajo de campo y oficina necesarios para la obtención de alturas equivalentes a las niveladas.

CONCEPTOS BÁSICOS

Teniendo como punto de partida el hecho de que el lector está familiarizado con la adquisición de datos GNSS y su procesamiento, se definen brevemente los diferentes conceptos involucrados en la metodología (Figura 1).

- Elipsoide: Modelo físicomatemático que representa a la Tierra, caracterizado por las constantes geométricas a (semieje mayor) y f (aplanamiento), y los parámetros físicos ω (velocidad angular de rotación) y m (masa).
- Geoide: superficie equipotencial de referencia, hipotéticamente coincidente con el nivel medio del mar en calma. Actualmente, se cuenta con el modelo IGAC de alta resolución GEOCOL2004, disponible en la Subdirección Cartográfica y Geodésica.
- Altura elipsoidal (h): Medida a lo largo de la normal elipsoidal, es la distancia entre la superficie del elipsoide y el punto de medición. La magnitud y dirección de este vector dependen del elipsoide empleado. En esta guía se adopta el elipsoide GRS80 en virtud

de su amplia utilización por parte de los usuarios del sistema GNSS.

- Altura Nivelada (H): Es la distancia vertical medida por el método de nivelación geométrica o trigonométrica entre uno o varios puntos d́atum verticales (en el caso de Colombia es Buenaventura) y el punto de medici3n. Esta altura es llamada, incorrectamente, altura ortométrica.
- Altura ortométrica (H_{ort}): Es la distancia tomada en la direcci3n normal al geoide entre 3ste y el punto de medici3n. La curvatura de esta altura en la gŕfica se debe al hecho de que la ĺnea de plomada coincide con el vector gravedad a medida que atraviesa diferentes superficies equipotenciales, las cuales no son paralelas entre ś.

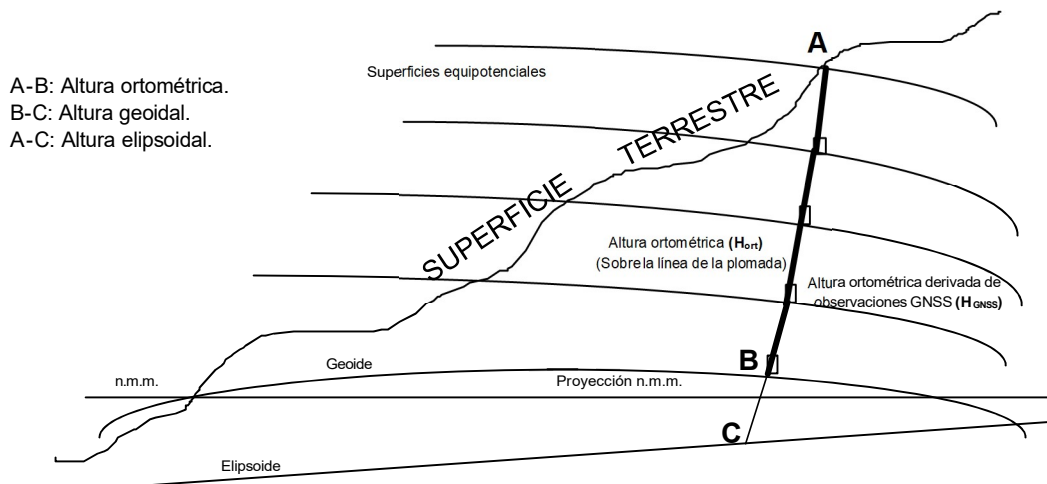


Figura 1. Definici3n de alturas.

- Ondulaci3n geoidal (N): Tomada sobre la normal elipsoidal de un punto, es la distancia que separa al elipsoide del geoide.
- Altura nivelada GNSS (H_{GNSS}): Es la denominaci3n que se ha dado a la altura de un punto obtenida por el m3todo aqú planteado. Es equivalente, bajo las mejores condiciones, a la altura nivelada trigonom3ricamente.

METODOLOGÍA EN CAMPO

Antes de exponer algunos posibles casos a resolver, es necesario puntualizar sobre aspectos b́asicos del rastreo :

- 1- El tiempo ḿnimo de rastreo sobre un punto debe ser de 15 minutos contados a partir de la estabilizaci3n del equipo y la disponibilidad ḿnima de 4 sat3lites.
- 2- Por cada kil3metro de distancia a la base se rastrean 5 minutos adicionales. En casos en que la configuraci3n del sistema sea excelente, el tiempo adicional por cada kil3metro puede reducirse a 3 minutos.
- 3- No debe haber tiempos de rastreo menores a 18 minutos.
- 4- Debe evitarse realizar rastreos sobre distancias mayores a 20 km. En los casos en que estas condiciones no se puedan cumplir, es necesario aumentar los tiempos de rastreo de acuerdo con lo planteado en el ítem 1 y 2.
- 5- Se sugiere, como una forma de mejorar los resultados, ejecutar rastreos dobles sobre cada punto involucrado; esto, con el ́nimo de disminuir la ocurrencia de errores de tipo

- sistemático o aleatorios.
- 6- Los NPs ocupados deben ser, preferiblemente, de primer orden.

Caso 1. PUNTO: Determinación de la altitud de un punto sobre el nivel medio del mar.

- A. Se toma como base inicial el vértice geodésico IGAC - preferiblemente de primer orden más cercano al área del proyecto.
- B. Se seleccionan al menos dos vértices de nivelación NP a los cuales se les traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en A. De este modo, se definen valores de latitud, longitud, altura h , altura H y ondulación N GEOCOL2004 para cada NP y el punto base. (Figura 2).

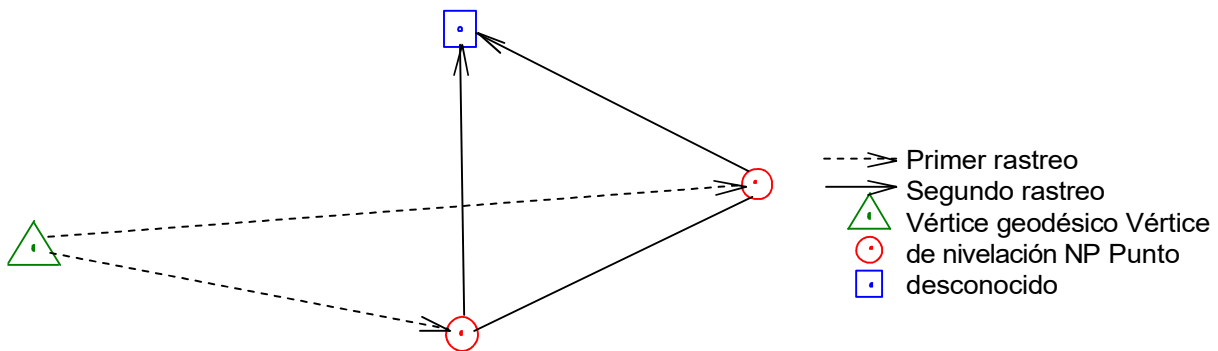


Figura 2. Determinación de la altitud de un punto sobre el nivel medio del mar utilizando el Sistema GNSS.

- C. Los dos NPs rastreados servirán como base para la determinación de la altitud del punto nuevo con altura desconocida (rover).

Los criterios de planeación y tiempos de rastreo se mantienen y la selección de la base estará en función de las conveniencias del proyecto.

Los datos que deben utilizarse en oficina para obtener la altura nivelada por medio de GNSS (H_{GNSS}) del punto nuevo son: Altura elipsoidal (h) del vértice geodésico, de los NPs y del punto nuevo ; altura nivelada (H) de los NPs, y la ondulación geoidal (N GEOCOL2004) de todos los puntos involucrados.

Caso 2. PERFIL : Determinación de alturas para una serie de puntos dispuestos a lo largo de un perfil.

- A. Se toma como base inicial el vértice geodésico IGAC - preferiblemente de primer orden más cercano al área del proyecto.
- B. Se selecciona un NP al cual se le traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en A, definiéndole valores de latitud, longitud, altura h , altura H y ondulación N GEOCOL2004. Este NP se constituye en la nueva base para el rastreo del perfil.
- C. Para rastrear el perfil es necesario dividirlo en circuitos, cuyas longitudes se definen por la distancia horizontal entre la base y las estaciones ubicadas dentro de los siguientes 20 km. Alcanzada esta distancia, debe definirse una nueva base, la cual es el último punto del circuito inmediatamente anterior (Figura 3).

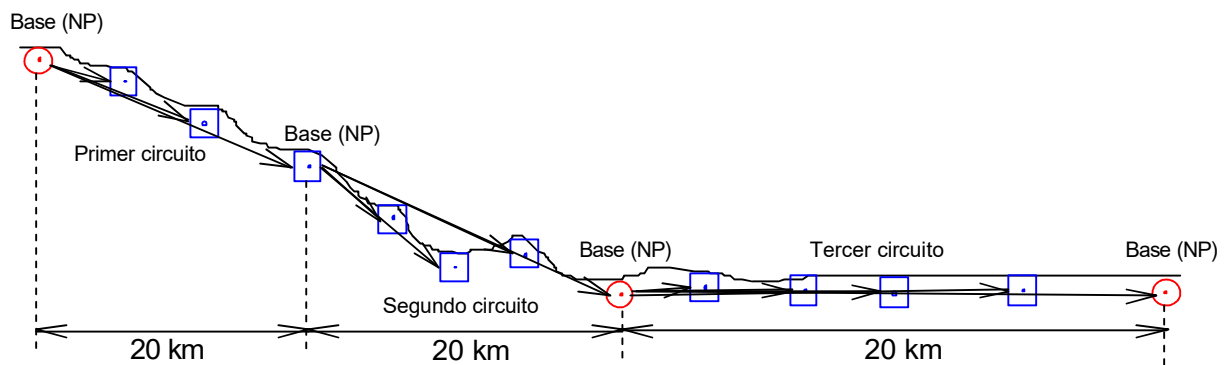


Figura 3. Determinación de la altura de los puntos contenidos en un perfil utilizando el Sistema GNSS

D. En el proceso se repiten los pasos B y C hasta finalizar la línea.

E. El último punto rastreado en el proyecto debe ser un NP de tipo geodésico.

Si existen más NPs cercanos al área del proyecto, éstos deben involucrarse como bases en el rastreo de los diferentes circuitos.

Los datos que se utilizan en oficina para calcular la altura nivelada por medio de GNSS (H_{GNSS}) de los puntos nuevos son: Altura elipsoidal (h) y ondulación geoidal (N GEOCOL2004) de todos los puntos utilizados y la altura nivelada (H) de los vértices de nivelación (NPs).

Caso 3. SUPERFICIE: Determinación de alturas para puntos distribuidos en un área.

A. Se toma como base inicial el vértice geodésico IGAC - preferiblemente de primer orden más cercano al área del proyecto.

B. Se seleccionan por lo menos cuatro (4) NPs, a los cuales se les traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en A, definiéndoles valores de latitud, longitud, altura h , altura H y ondulación N GEOCOL2004. Estos NPs se constituyen en las nuevas bases para el rastreo de los puntos contenidos en la superficie (Figura 4).

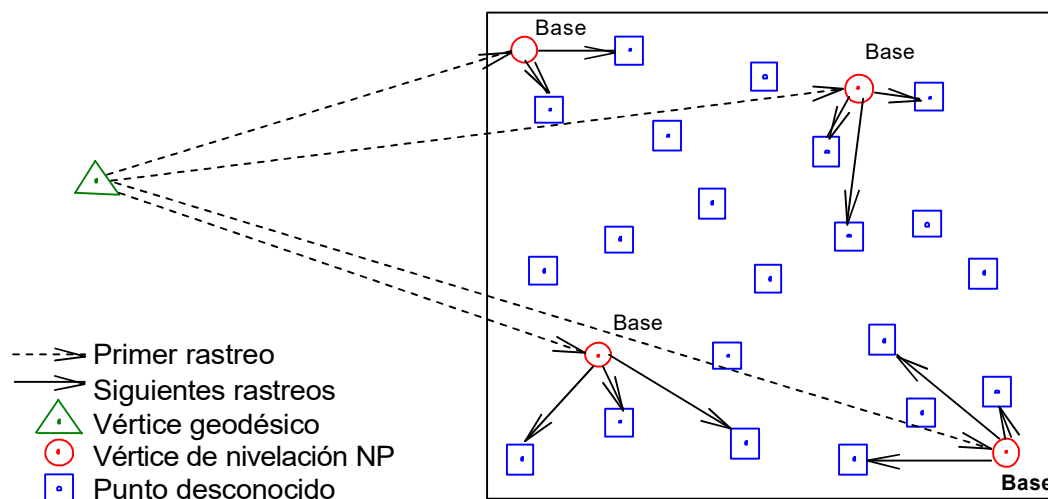


Figura 4. Determinación de la altitud de los puntos contenidos en una superficie utilizando el Sistema GNSS.

- C. De acuerdo con las condiciones locales, se determinará la distribución de los puntos a rastrear por cada día, manteniendo las condiciones básicas de duración y distancia.
- D. Para cada día, es necesario que la base tenga altura definida sobre el nivel medio del mar.

Una superficie puede considerarse como un conjunto de perfiles, cuyas bases y puntos finales deben ser NPs.

Los datos que permiten obtener la altura nivelada por medio de GNSS (H_{GNSS}) de los puntos nuevos son: Altura elipsoidal (h) y ondulación geoidal (N GEOCOL2004) de todos los puntos utilizados y la altura nivelada (H) de los vértices NP.

METODOLOGÍA EN OFICINA

Una vez recopilada la información en campo y procesadas las coordenadas latitud (ϕ), longitud (λ) y altura elipsoidal (h) de cada estación rastreada, la determinación de alturas ortométricas mediante el Sistema GNSS se describe en el siguiente procedimiento:

- a. Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales de la base (h_{Base}) y sus rover (h_{Ri}) correspondientes:

$$\Delta h_i = h_{Ri} - h_{Base} \quad (1)$$

- b. Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre la base (N_{Base}) y sus rover (N_{Ri}) correspondientes:

$$\Delta N_i = N_{Ri} - N_{Base} \quad (2)$$

- c. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GNSS (ΔH_{GNSSi}) entre la base y sus rover correspondientes:

$$\Delta H_{GNSSi} = \Delta h_i - \Delta N_i \quad (3)$$

- d. Cálculo de las alturas ortométricas GNSS iniciales (H°_{GNSSi}) de los puntos desconocidos:

$$H^{\circ}_{GNSSi} = H_{Base} + \Delta H_{GNSSi} \quad (4)$$

- e. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GNSS iniciales (H°_{GNSSi}) entre estaciones consecutivas:

$$\Delta H^{\circ}_{GNSS} = \Delta H_{GNSSi} - \Delta H_{GNSSi-1} \quad (5)$$

éstas deben ser ajustadas a partir de los valores de altura nivelados en las bases.

- f. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GNSS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

$$BV + W = 0 \quad (6)$$

Siendo:

$$V = P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} W \quad (7)$$

$$W = C - BL \quad (8)$$

donde:

$B = b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición,

$P=p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones,
 $L=l_{n,1}$: Vector de las observaciones,
 $C=c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición y
 $V=(v_i)_{(i=1,2,...,n)}$: Vector de las desviaciones de las cantidades observadas.

g. Determinación de las alturas ortométricas GNSS definitivas:

$$H_{GNSS-Final} = H_{Nivelada\ de\ la\ base} + \Delta H_i\ Ajustado \quad (9)$$

En este proceso matemático se recomienda trabajar cuatro dígitos decimales, con el propósito de que los errores generados en el redondeo de las cifras se acumulen en el último.

EJEMPLOS

A continuación, se presenta un ejemplo, del procesamiento de datos en oficina, por cada uno de los casos citados en la metodología de campo.

Caso 1. PUNTO: Determinación de la altura sobre el nivel medio del mar de un punto.

Se desea conocer la altura ortométrica GNSS del vértice geodésico TG13, localizado en Monserrate, a partir del vértice CODAZZI y los NPs 6-E-1, B9-S-1, 86-CM-14 y 90-CM-14. Las coordenadas geodésicas y la altura elipsoidal de éstos ya han sido calculadas y ajustadas.

Las diferentes alturas de cada punto se ilustran en la tabla 1.

Vértice / punto	Altura Elipsoidal (h)	Altura GEOCOL2004 (N)	Altura Nivelada
CODAZZI	2 610,816 0 m	21,566 8 m	2 588,552 3 m
NP 6-E-1	2 697,287 6 m	20,900 2 m	2 673,270 0 m
NP B9-S-1	2 580,791 4 m	20,834 7 m	2 557,386 7 m
NP 86-CM-14	2 575,761 1 m	20,981 2 m	2 552,590 0 m
NP 90-CM-14	2 577,508 7 m	20,979 9 m	2 553,953 8 m
Punto TG13	3 217,842 0 m	21,546 9 m	Por determinar

Tabla 1. Alturas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura ortométrica GNSS de un punto (Caso 1).

a. Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales del punto de cálculo y las estaciones de altura conocida: $\Delta h = h_{TG13} - h_{NPi}$ (Ver tabla 2)

b. Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre el punto de cálculo y las estaciones de altura conocida: $\Delta N = N_{TG13} - N_{NPi}$ (Ver tabla 2)

c. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GPS (ΔH_{GPSi}) entre el punto de cálculo y las estaciones de altura conocida: $\Delta H_{GPSi} = \Delta h_i - \Delta N$ (ver tabla 2)

Vértice / punto	$\Delta h_i = h_{TG13} - h_{NPi}$	$\Delta N_i = N_{TG13} - N_{NPi}$	$\Delta h_{GNSSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$
TG13 - CODAZZI	607,026 3 m	-0,019 9 m	607,046 2 m
TG13 – NP 90-CM-14	640,333 3 m	0,567 0 m	639,766 3 m
TG13 – NP B9-S-1	637,050 6 m	0,712 2 m	636,338 4 m
TG13 – NP 6-E-1	520,554 4 m	0,646 7 m	519,907 7 m
TG13 – NP 86-CM-14	642,080 9 m	0,565 7 m	641,515 2 m

Tabla 2. Alturas relativas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura ortométrica GNSS de un punto (Caso 1).

Una vez determinadas las alturas relativas entre el punto desconocido (TG13) y los vértices con valor de altitud, el problema se representa esquemáticamente (Figura 5) para facilitar el diseño del ajuste por mínimos cuadrados.

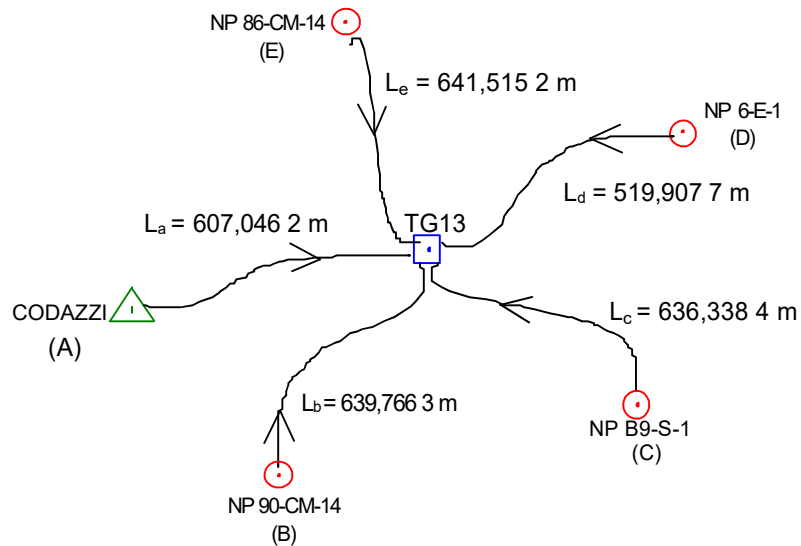


Figura 5. Representación esquemática de la determinación de la altura ortométrica GNSS de un punto (Caso 1). El sentido de la flecha indica la altura mayor.

d. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GNSS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

Formulación de las ecuaciones de condición:

La cantidad de ecuaciones de condición que deben plantearse es igual al número de estaciones con altura conocida (5) menos el número de estaciones con altura desconocida (1), en este caso deben formularse cuatro (4) ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (l_a + v_a) - (l_c + v_c) &= H_{nivC} - H_{nivA} = -31,165 6 \text{ m} \\
 (l_e + v_e) - (l_b + v_b) &= H_{nivB} - H_{nivE} = 1,363 8 \text{ m} \\
 (l_a + v_a) - (l_d + v_d) &= H_{nivD} - H_{nivA} = 84,717 7 \text{ m} \\
 (l_e + v_e) - (l_c + v_c) &= H_{nivC} - H_{nivE} = 4,796 7 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Planteamiento de las matrices:

$B = b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición.

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$P = p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones. En este caso se considera que las observaciones fueron realizadas bajo condiciones iguales, por lo tanto, la matriz P es idéntica.

$C = c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición.

$$C = \begin{vmatrix} -31,165 \text{ m} \\ 1,363 \text{ m} \\ 84,717 \text{ m} \\ 4,796 \text{ m} \end{vmatrix}$$

$L = l_{n,1}$: Vector de las observaciones.

$$L = \begin{vmatrix} 607,046 \text{ m} \\ 639,766 \text{ m} \\ 636,338 \text{ m} \\ 519,907 \text{ m} \\ 641,515 \text{ m} \end{vmatrix}$$

Solución del problema:

Una vez planteadas las matrices se desarrollan las siguientes operaciones:

$$BV + W = 0$$

$$V = P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} W$$

$$W = C - BL$$

Así, se obtienen las desviaciones (v_i) de las observaciones realizadas.

$$V = \begin{vmatrix} -1,533 \text{ m} \\ 0,345 \text{ m} \\ 0,340 \text{ m} \\ 0,887 \text{ m} \\ -0,039 \text{ m} \end{vmatrix}$$

Las observaciones corregidas corresponden con: $L^* = L + V$:

$$L^* = \begin{vmatrix} 605,513 \text{ m} \\ 640,111 \text{ m} \\ 636,678 \text{ m} \\ 520,795 \text{ m} \\ 641,475 \text{ m} \end{vmatrix}$$

g. Determinación de la altura ortométrica GNSS definitiva:

La altura ortométrica GNSS del punto TG13 será igual a la altura nivelada de cualquiera de los puntos considerados más su correspondiente diferencia ajustada:

$$\begin{aligned} H_{GNSS\ TG13} &= H_{niv\ CODAZZI} + L^*_A = 2\ 588,552\ 3\ m + 605,513\ 0\ m = 3\ 194,065\ 3\ m \\ H_{GNSS\ TG13} &= H_{niv\ 90-CM-14} + L^*_B = 2\ 553,953\ 8\ m + 640,111\ 5\ m = 3\ 194,065\ 3\ m \\ H_{GNSS\ TG13} &= H_{niv\ B9-S-1} + L^*_C = 2\ 557,386\ 7\ m + 636,678\ 6\ m = 3\ 194,065\ 3\ m \\ H_{GNSS\ TG13} &= H_{niv\ 6-E-1} + L^*_D = 2\ 673,270\ 0\ m + 520,795\ 3\ m = 3\ 194,065\ 3\ m \\ H_{GNSS\ TG13} &= H_{niv\ 86-CM-14} + L^*_E = 2\ 552,590\ 0\ m + 641,475\ 3\ m = 3\ 194,065\ 3\ m \end{aligned}$$

Caso 2. PERFIL : Determinación de alturas para una serie de puntos dispuestos a lo largo de un perfil.

Se quiere determinar la altura ortométrica GNSS de los puntos B70-NW-1, B72-NW-1, B75-NW-1, A76-NW-1, B78-NW-1 y B86-NW-1, a partir de las alturas niveladas de los NPs A68-NW-1 y B88-NW-1. Las coordenadas geodésicas y la altura elipsoidal de éstos ya han sido calculadas y ajustadas.

Las diferentes alturas de cada punto se ilustran en la Tabla 3.

Vértice	Altura Elipsoidal (h)	Altura GEOCOL2004 (N)	Altura nivelada
NP A68-NW-1	1 520,908 0 m	23,121 7 m	1 502,268 7 m
NP B70-NW-1	1 424,884 3 m	23,119 1 m	A determinar
NP B72-NW-1	1 171,897 0 m	23,119 3 m	A determinar
NP B75-NW-1	997,063 3 m	23,110 2 m	A determinar
NP A76-NW-1	1 071,121 5 m	23,107 6 m	A determinar
NP B78-NW-1	1 252,306 4 m	23,102 5 m	A determinar
NP B86-NW-1	805,467 7 m	23,091 6 m	A determinar
NP B88-NW-1	626,135 0 m	22,811 3 m	608,349 7 m

Tabla 3. Alturas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura ortométrica GNSS de los puntos contenidos en un perfil (Caso 2).

a. Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales de la base (h_{Base}) y sus rover (h_{Ri}) correspondientes: $\Delta h_i = h_{Ri} - h_{Base}$ (Ver tabla 4)

b. Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre la base (N_{Base}) y sus rover (N_{Ri}) correspondientes: $\Delta N_i = N_{Ri} - N_{Base}$ (Ver tabla 4)

c. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GNSS (ΔH_{GNSSi}) entre la base y sus rover correspondientes: $\Delta H_{GNSSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$ (Ver tabla 4)

Vértices	$\Delta h_i = h_{Ri} - h_{Base}$	$\Delta N_i = N_{Ri} - N_{Base}$	$\Delta H_{GNSSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$
B70-NW-1 - A68-NW-1	-96,023 7 m	-0,002 6 m	-96,021 1 m
B72-NW-1 - A68-NW-1	-349,011 0 m	-0,002 4 m	-349,008 6 m
B75-NW-1 - A68-NW-1	-523,844 7 m	-0,011 5 m	-523,833 2 m
A76-NW-1 - A68-NW-1	-449,786 5 m	-0,014 1 m	-449,772 4 m
B78-NW-1 - A68-NW-1	-268,601 6 m	-0,019 2 m	-268,582 4 m
B86-NW-1 - A68-NW-1	-715,440 3 m	-0,030 1 m	-715,410 2 m
B88-NW-1 - A68-NW-1	-894,773 0 m	-0,310 4 m	-894,462 6 m

Tabla 4. Alturas relativas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura ortométrica GNSS de puntos contenidos en un perfil (Caso 2).

d. Cálculo de las alturas ortométricas GNSS iniciales (H°_{GNSSi}) de los puntos desconocidos:

$$H^{\circ}_{GNSSi} = h_{Base} + \Delta H_{GNSSi} \text{ (Tabla 5).}$$

e. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GNSS iniciales (H°_{GNSSi}) entre estaciones consecutivas: $\Delta H^{\circ}_{GNSS} = \Delta H_i - \Delta H_{i-1}$ (Tabla 5).

VÉRTICE	Altura ortométrica GNSS inicial (H°_{GNSSi})	$\Delta H^{\circ}_{GNSS} = H^{\circ}_{GNSSi} - H^{\circ}_{GNSSi-1}$
NP A68-NW-1 Base	1 502,268 67 m	
NP B70-NW-1	1 406,247 60 m	-96,021 1 m
NP B72-NW-1	1 153,260 10 m	-252,987 5 m
NP B75-NW-1	978,435 50 m	-174,824 6 m
NP A76-NW-1	1 052,496 30 m	74,060 8 m
NP B78-NW-1	1 233,686 27 m	181,190 0 m
NP B86-NW-1	786,858 50 m	-446,827 8 m
NP B88-NW-1	607,806 10 m	-179,052 4 m

Tabla 5. Alturas ortométricas con GNSS y sus diferencias relativas (Caso 2).

Una vez determinadas las alturas relativas entre los diferentes puntos, el problema se representa esquemáticamente (Figura 6) para facilitar el diseño del ajuste por mínimos cuadrados.

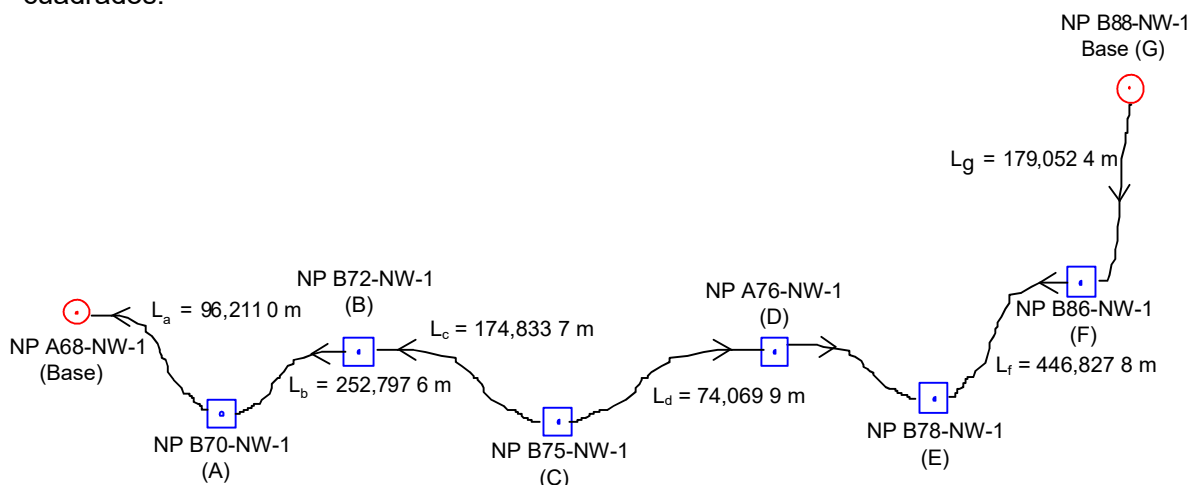


Figura 6. Representación esquemática de la determinación de la altura ortométrica GNSS de puntos contenidos en un perfil (Caso 2). El sentido de la flecha indica la altura mayor.

d. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GNSS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

Ecuaciones de condición:

$$-(l_a + v_a) - (l_b + v_b) - (l_c + v_c) + (l_d + v_d) + (l_e + v_e) - (l_f + v_f) - (l_g + v_g) = H_{NP\ B88-NW-1} - H_{NP\ A68-NW-1} = -893,919\text{ m}$$

Planteamiento de las matrices:

$B = b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$P = p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones. En este caso se considera que las observaciones fueron realizadas bajo condiciones iguales, por lo tanto, la matriz P es idéntica.

$C = c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición.

$$C = \begin{bmatrix} -893,919\text{ m} \end{bmatrix}$$

$L = l_{n,1}$: Vector de las observaciones.

$$L = \begin{bmatrix} 96,021\ 1\text{ m} \\ 252,987\ 5\text{ m} \\ 174,824\ 6\text{ m} \\ 74,060\ 8\text{ m} \\ 181,190\ 0\text{ m} \\ 446,827\ 8\text{ m} \\ 179,052\ 4\text{ m} \end{bmatrix}$$

Solución del problema:

Una vez planteadas las matrices se desarrollan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} BV + W &= 0 \\ V &= P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} W \\ W &= C - BL \end{aligned}$$

Así, se obtienen las desviaciones (v_i) de las observaciones realizadas.

$$V = \begin{bmatrix} -0,077\ 657\text{ m} \\ -0,077\ 657\text{ m} \\ -0,077\ 657\text{ m} \\ 0,077\ 657\text{ m} \\ 0,077\ 657\text{ m} \\ -0,077\ 657\text{ m} \\ -0,077\ 657\text{ m} \end{bmatrix}$$

Las observaciones corregidas corresponden con: $L^* = L + V$:

$$L^* = \begin{bmatrix} 96,943\ 4\text{ m} \\ 252,909\ 8\text{ m} \\ 174,746\ 9\text{ m} \\ 74,138\ 5\text{ m} \\ 181,267\ 7\text{ m} \\ 446,750\ 1\text{ m} \\ 178,974\ 7\text{ m} \end{bmatrix}$$

g. Determinación de las alturas ortométricas GNSS definitivas:

$$H_{\text{GNSS Final}} = H_{\text{Nivelada de la base}} + \Delta H_i \text{ Ajustado}$$

Ejemplo: 1 502,268 7 m + -95,943 4 m = 1 406,325 3 m

1 406,325 3 m + -252,909 8 m = 1 153,415 4 m

VÉRTICE	ΔH_i Ajustado	$H_{\text{GNSS Final}} = H_{\text{GNSS Final-1}} + \Delta H_i \text{ Ajustado}$
NP A68-NW-1 Base		1 502,268 7 m
NP B70-NW-1	-95,943 4 m	1 406,325 3 m
NP B72-NW-1	-252,909 8 m	1 153,415 4 m
NP B75-NW-1	-174,746 9 m	978,668 5 m
NP A76-NW-1	74,138 5 m	1 052,806 9 m
NP B78-NW-1	181,267 7 m	1 234,074 6 m
NP B86-NW-1	-446,750 1 m	787,324 5 m
NP B88-NW-1	-178,974 7 m	608,349 8 m

Tabla 6. Alturas ortométricas GNSS para los puntos contenidos en un perfil (Caso 2).